

文章编号: 1000-7598 (2013) 07-2099-05

基于分叉理论的岩体局部化现象研究

强 跃^{1,2,3}, 赵明阶³, 林军志³, 何 建¹

(1. 重庆三峡学院 土木工程学院, 重庆 404100; 2. 重庆交通大学 交通土建工程材料国家地方联合工程实验室, 重庆 400074; 3. 重庆交通大学 河海学院, 重庆 400074)

摘 要: 为了研究岩体局部化现象, 基于轴向压杆稳定实例, 运用数理和力学知识, 根据 Drucker-Prager (简称 D-P) 准则, 推导了基于分叉理论的通用表达式。在此基础上, 结合有限差分理论得出 FLAC^{3D} 计算中岩体内发生分叉的判定条件, 之后在自带的 FISH 编译语言的辅助下, 在 FLAC^{3D} 中建立数值分析模型, 采用 D-P 本构关系, 研究了岩体局部化现象及其发展过程。研究表明: 在 FLAC^{3D} 中以 20 000 步为间隔所得的不平衡力比率模型系统逐渐趋于稳定, 不平衡力比率逐渐降低, 局部化现象的规模逐渐扩大至稳定, 清晰度逐渐增加, 证实了分叉理论能够有效地分析研究岩体局部化现象。给出的岩体局部化判定条件和数值验证, 较为科学合理地阐述了常用分叉判定条件的由来, 为解释岩体局部化现象的机制和过程提供了理论支撑, 从而对岩体局部化现象研究起到了一定的推进作用。

关 键 词: 分叉理论; 岩体局部化现象; FISH 语言

中图分类号: TU 452

文献标识码: A

Study of localization phenomena in rock mass based on bifurcation theory

QIANG Yue^{1,2,3}, ZHAO Ming-jie³, LIN Jun-zhi³, HE Jian¹

(1. College of Civil Engineering, Chongqing Three Gorges University, Chongqing 404100, China; 2. National and Local Joint Engineering Laboratory of Transportation and Civil Engineering Materials, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China; 3. School of River and Ocean Engineering, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China)

Abstract: In order to study the rock localization phenomenon, based on the examples of the stability of axial pressure bar, applied the mathematical and mechanical knowledge, according to Drucker-Prager criterion, a universal formula can be derived based on the bifurcation theory. On this basis, combined with the finite difference theory, the judging criterion of bifurcation in rock mass in FLAC^{3D} calculation can be worked out. Then under the assistant of own FISH compile language, using the Drucker-Prager criterion, a numerical analysis model is established in FLAC^{3D} to study the rock localization phenomenon and its development process. The results show that in FLAC^{3D} the imbalance force ratio model system came from the 20 000 steps interval gradually tends to be stable, the unbalanced force ratio gradually reduces; the localization phenomenon gradually expands the scale to its stability; and the clarity increases gradually, which confirms that the bifurcation theory can effectively analyze the rock localization phenomenon. The rock bifurcation criteria of rock localization phenomenon and numerical verification given by this paper more scientifically and reasonably expound the origin of the universal bifurcation condition, so as to provide the theoretical support for the explanation of the mechanism and process of the rock localization phenomenon to play a promoting role.

Key words: bifurcation theory; localization phenomena; FISH language

1 引 言

岩体局部化现象是指岩体部分区域出现大的剪切变形 (通常是剪切带) 而使岩体呈现不连续的现象。岩体局部化现象研究是岩土工程中的一个重要领域, 弄清它的机制对矿山巷道开挖、围岩支护等

有着重要的指导意义。目前不少学者^[1-2]对岩体局部化现象进行了较为全面的阐述, 部分学者^[3-4]从模型试验的角度来揭示岩体局部化现象的机制。

近年来, 由于工程实践中不断涌现出大量的分叉问题, 使得在理论上建立了较系统地处理这类问题的方法, 且已发展成为一个独立的数学研究方向,

收稿日期: 2012-06-16

基金项目: 国家自然科学基金面上项目 (No. 51279219); 重庆交通大学交通土建工程材料国家地方联合工程实验室开放基金项目 (No. LHSYS2012-001); 重庆市城乡建设委员会项目 (城科学 2011 第 2-89 号); 三峡库区库岸地质灾害预防与科研创新团队科研项目; 重庆市教委科学技术研究项目 (No. KJ131107)。
第一作者简介: 强跃, 男, 1981 年生, 博士研究生, 讲师, 从事岩土工程研究。E-mail: qiangyue-320@163.com

即分叉理论。该理论主要研究在一个带参数的动力体系中平衡态随参数变化时个数发生变化的现象,特别是平衡态由1个分裂为2个或多个的现象^[5]。

岩土工程领域中存在很多分叉问题,如压杆的稳定和本文研究的岩体局部化现象。目前已经有许多学者引入分叉理论来研究岩土领域的问题,秦卫星^[6]利用分叉理论研究边坡的稳定性,文献[7-10]从分叉的角度研究岩土体的剪切和变形,文献[11-12]用分叉理论来求解一些特定条件下的统一解,文献[13]基于CT机利用分叉和混沌理论对煤岩单轴破坏进行了研究。本文是作者研究岩体分区破裂化现象的前期工作,借鉴文献[6]中利用分叉理论研究边坡稳定的思路,结合有限差分数值软件FLAC^{3D},用分叉理论来尝试研究岩体局部化现象,效果较为理想,为进一步研究岩体分区破裂化现象奠定基础。

2 分叉理论

如图1所示,轴向受压的弹性圆柱杆,若以轴向压力 P 为参数,当 P 由0逐渐增大时,杆变为粗短,但其中心线保持挺直;而当 P 超过某一定值 P_{cr} 时,杆的中心线开始变弯,弯曲度可用最大水平偏移量 u 来衡量(见图1)。所以当 $P < P_{cr}$ 时,杆只有1个平衡态,而当 $P > P_{cr}$ 时,杆有2个平衡态(见图2)。

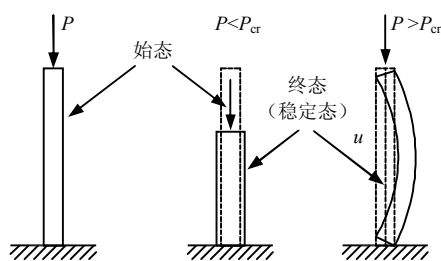


图1 分叉实例(压杆稳定)

Fig.1 A case of bifurcation (stability of pressure bar)

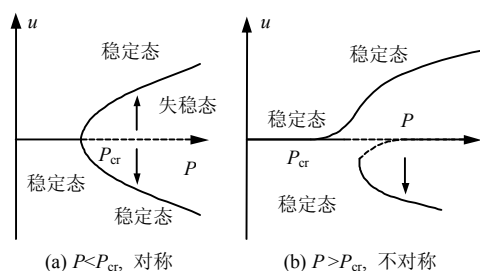


图2 $P-u$ 曲线

Fig.2 Curves of $P-u$

在数学上,用算子方程式(1)的解来描述系统的平衡态,其中 P 为轴向压力, u 为最大水平位移

偏移量,属于某向量空间。

$$F(u, P) = 0 \quad (1)$$

如果 (u_0, P_0) 是分叉点,那么式(1)对 P 的偏导数必然是奇异的。

在岩土领域,弹塑性材料的张量本构关系^[6]为

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (2)$$

$$D_{ijkl} = D_{ijkl}^e - D_{ijkl}^p = D_{ijkl}^e - \frac{1}{A} D_{ijst}^e q_{st} y_{mn} D_{mnkl}^e \quad (3)$$

$$A = H + \frac{\partial Y}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl}^e \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{kl}} \quad (4)$$

$$q_{st} = \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{st}} \quad (5)$$

$$y_{mn} = \frac{\partial Y}{\partial \sigma_{mn}} \quad (6)$$

式中: $\dot{\sigma}_{ij}$ 为应力张量的变化率; $\dot{\epsilon}_{kl}$ 为应变速率张量; Y 为屈服函数; Q 为塑性势函数; H 为塑性硬化模量; D_{ijkl}^e 为四阶弹性模量张量; D_{ijkl}^p 为四阶塑性模量张量。

依据 Borja 等^[14]的研究,发生分叉时应变发生跳跃,局部化张量奇异,可表示为

$$\det(n_i D_{ijkl} n_j) = 0 \quad (7)$$

式中: n_i 、 n_j 是局部化面法向方向张量。

对岩土领域常用的D-P准则,其屈服函数为

$$Y = \sqrt{J_2} - \alpha I_1 - k = 0 \quad (8)$$

$$\alpha = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{3(3 + \sin^2 \varphi)}} \quad (9)$$

$$k = \frac{3c \cos \varphi}{\sqrt{3(3 + \sin^2 \varphi)}} \quad (10)$$

式中: c 为黏聚力; φ 为内摩擦角; I_1 为应力张量第一不变量; J_2 为偏应力张量第二不变量。

其塑性势函数为

$$Q = \sqrt{J_2} - \beta I_1 - k = 0 \quad (11)$$

$$\beta = \frac{\sin \phi}{\sqrt{3(3 + \sin^2 \phi)}} \quad (12)$$

式中: ϕ 为剪胀角。

将式(7)、(10)代入式(3),得到在平面应变条件下的弹性模量张量和塑性模量张量为

$$D_{ijkl}^e = \left(K - \frac{2}{3} G \right) \delta_{ij} \delta_{kl} + 2G \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (13)$$

$$D_{ijkl}^p = \frac{1}{9\alpha\beta K + G + H} \left(G \frac{1}{\sqrt{J_2}} s_{ij} - 3\alpha K \delta_{ij} \right) \left(G \frac{1}{\sqrt{J_2}} s_{kl} - 3\alpha K \delta_{kl} \right) \quad (14)$$

式中: K 为体积模量; G 为剪切模量; δ_{ij} 为克罗内克符号; s_{ij} 为应变偏量。

D-P 准则是理想的弹塑性本构关系, 于是,

$$H = 0 \quad (14)$$

再将式 (12)~(14) 代入式 (6) 求行列式, 于是分叉的解析解^[6]为

$$2(\alpha - \beta)^2 - (1 - \mu) \left(\frac{s_2}{\sqrt{J_2}} + \alpha + \beta \right)^2 = 0 \quad (15)$$

$$s_2 = \sigma_2 - I_1 / 3$$

特别的, 关联流动时($\alpha = \beta$):

$$s_2 = -2\alpha\sqrt{J_2} \quad (16)$$

非关联流动时($\beta = 0$):

$$2\alpha^2 - (1 - \mu) \left(\frac{s_2}{\sqrt{J_2}} + \alpha \right)^2 = 0 \quad (17)$$

3 数值原理及流程

FLAC^{3D} 采用拉格朗日差分原理, 结合系统内虚功与外虚功之间的关系, 推导出系统不平衡力的表达式后迭代运算进行求解^[15]。

内虚功可以表示为

$$I = \int_V \delta \xi_{ij} \sigma_{ij} dV \quad (18)$$

式中: δ 为克罗内克符号; dV 为体积增量。

应变率张量表示为

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2} (v_{j,i} + v_{i,j}) \quad (19)$$

式中: $v_{j,i} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$, $v_{i,j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$, 其中 v 表示速度函数, x 表示坐标函数。

式 (18) 变为

$$I = -\frac{1}{6} \sum_{l=1}^4 (\delta v_i^l \sigma_{ij} n_j^l + \delta v_j^l \sigma_{ij} n_i^l) S^l = -\frac{1}{3} \sum_{l=1}^4 \delta v_i^l T_i^l \quad (20)$$

式中: T_i^l 为应力张量, 它是对称的; n_i 、 n_l 是局部化面法向方向张量; S^l 为局部化面。

外虚功可以表示为

$$E = \sum_{n=1}^4 \delta v_i^n \left[f_i^n + \frac{\rho b_i V}{4} - \int_V \rho N^n \frac{dv_i}{dt} dV \right] \quad (21)$$

式中: f_i^n 为系统不平衡力; N^n 为局部化面法向方向向量组成的张量。

由式 (20) 和式 (21), 系统不平衡力表示为

$$-f_i^n = \frac{T_i^n}{3} + \frac{\rho b_i V}{4} - m^n \left(\frac{dv_i}{dt} \right)^n \quad (22)$$

式中: ρ 为密度; m^n 为分配给节点的质量。

在系统迭代至第 i 步时, D-P 本构方程为

$$\Delta \sigma_i = D^e (\Delta \varepsilon_i - \dot{\varepsilon}_i^p \Delta t) \quad (23)$$

式中: D^e 为单元弹性矩阵; $\Delta \varepsilon_i$ 为应变增量; $\dot{\varepsilon}_i^p$ 为塑性应变率; Δt 为时间步长。

塑性应变率^[6]为

$$\dot{\varepsilon}_i^p = \langle T \rangle \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \quad (24)$$

$$\langle T \rangle = \begin{cases} 0, & T \leq 0 \\ T, & T > 0 \end{cases} \quad (25)$$

在时段 Δt_i 内平衡方程为

$$\int B^T D^e B dv \Delta \delta_i = \Delta P_i + \int B^T D^e B \dot{\varepsilon}_i^p \Delta t_i dv \quad (26)$$

式中: $\Delta \delta_i$ 为第 i 步位移增量; ΔP_i 为第 i 步荷载增量; B 为单元形函数的偏导矩阵。

在 FLAC^{3D} 中引入式 (15) 的分叉判断条件, 通过 FISH 语言编写整个数值模拟流程为

(1) 迭代一定的步数后, 按式 (18)~(22) 计算系统不平衡力;

$$\left| -f_i^n = \frac{T_i^n}{3} + \frac{\rho b_i V}{4} - m^n \left(\frac{dv_i}{dt} \right)^n \right| < Z_{tol} \quad (27)$$

式中: Z_{tol} 为趋近于 0 的无穷小量。

(2) 另一方面, 按式 (28) 计算每步的荷载增量,

$$\Delta P_i = \int B^T D^e B \dot{\varepsilon}_i^p \Delta t_i dV \quad (28)$$

计算式 (7)、(10)、(23)、(24) 后, 代入式 (29), 进行分叉判断。

$$\left| 2(\alpha - \beta)^2 - (1 - \mu) \left(\frac{s_2}{\sqrt{J_2}} + \alpha + \beta \right)^2 \right| < V_{tol} \quad (29)$$

式中: V_{tol} 为趋近于 0 的无穷小量。

迭代运算至同时满足式 (27) 和式 (29), 此时分叉化现象将显现。

4 数值分析

数值分析采用有限差分软件 FLAC^{3D}, 模型网格因对称只取 1/4 (见图 3), 外弧边界法向应力约束, 其他边界法向位移约束, 采用 D-P 本构模型, 各项参数如表 1 所示。

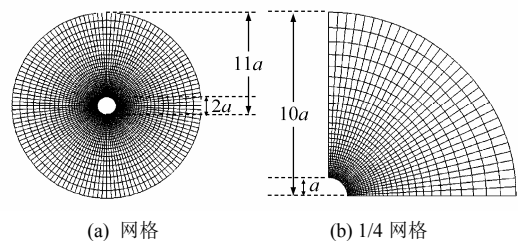


图 3 模型网格

Fig.3 Model meshes

表 1 模型参数
Table 1 Model properties

水平应力 /MPa	垂直应力 /MPa	剪切模量 /MPa	泊松比	k_ϕ /MPa	q_ϕ	塑性应变 量临界值	半径 a/m
30	30	1 000	0.25	18	0.69	4×10^{-3}	2

注：表中 q_ϕ 和 k_ϕ 见式 (8) 中 α 和式 (9) 中 k ，皆为材料参数。

在运算中以 20 000 步为间隔，依次计算了 20 000、40 000、60 000、80 000 步，其不平衡力比率 λ （第 i 步不平衡力与初始不平衡力的比值）分别为 1.94×10^{-3} 、 3.84×10^{-4} 、 7.35×10^{-5} 、 8.79×10^{-6} 逐渐递减，模型逐步趋近平衡（FLAC^{3D} 中默认系统不平衡力比率为 1×10^{-5} 以下时，系统达到平衡），由图 4 可以看出，岩体局部化现象逐步发展，规模越来越大直至稳定，且越来越清晰。

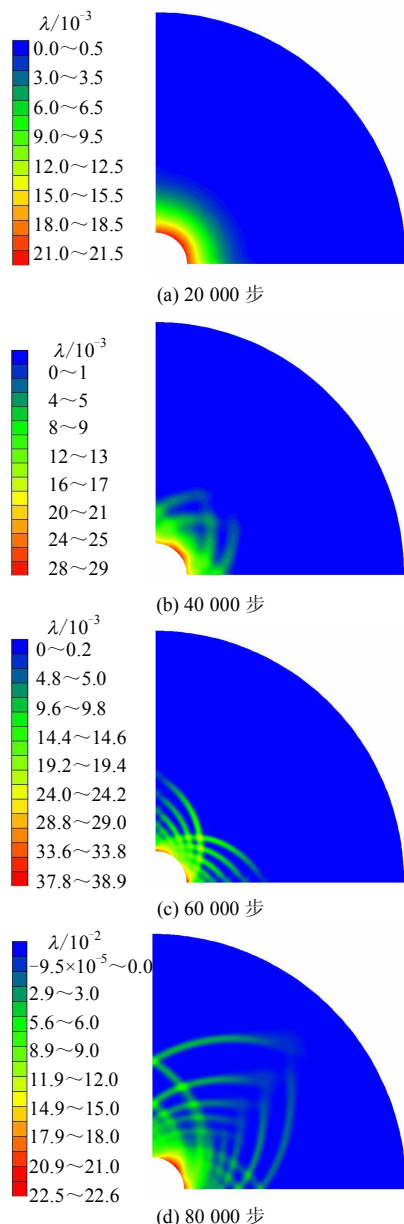


图 4 λ 与时步关系

Fig.4 Relationships between λ and time step

5 结 论

(1) 本文从材料的压杆现象引出分叉理论，并在分叉理论的通用表达式 (15) 基础上结合 FLAC^{3D} 自身的理论推导出 FLAC^{3D} 计算中发生分叉的必要条件式 (29)。

(2) 利用 FLAC^{3D} 自带的 FISH 语言编写该判定条件以及整个模拟流程来实现在 FLAC^{3D} 中显示岩体局部化现象及其发展过程。

(3) 基于上述编写的 FISH 的迭代计算效果非常理想，随时步增大，模型系统逐渐趋于稳定（不平衡力比率在降低）过程中，局部化现象的规模逐渐扩大至稳定和清晰度逐渐增加，证实了分叉理论能够有效地分析研究岩体局部化现象这个岩土工程领域中的分叉问题。

参 考 文 献

- [1] 钱七虎, 李树忱. 深部岩体工程围岩分区破裂化现象研究综述[J]. 岩石力学与工程学报, 2008, 27(6): 1278—1284.
QIAN Qi-hu, LI Shu-chen. A review of research on zonal disintegration phenomenon in deep rock mass engineering[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2008, 27(6): 1278—1284.
- [2] 贺永年, 张后全. 深部围岩分区破裂化理论和实践的讨论[J]. 岩石力学与工程学报, 2008, 27(11): 2369—2375.
HE Yong-nian, ZHANG Hou-quan. Discussion on theory and practice of zonal disintegration in surrounding rocks of deep roadways[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2008, 27(11): 2369—2375.
- [3] 张强勇, 陈旭光, 林波, 等. 深部巷道围岩分区破裂三维地质力学模型试验研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2009, 28(9): 1757—1766.
ZHANG Qiang-yong, CHEN Xu-guang, LIN Bo, et al. Study of 3D geomechanical model test of zonal disintegration of surrounding rock of deep tunnel[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2009, 28(9): 1757—1766.
- [4] 陈旭光, 张强勇, 杨文东, 等. 深部巷道围岩分区破裂现象的试验与现场监测对比[J]. 岩土工程学报, 2011, 33(1): 70—76.
CHEN Xu-guang, ZHANG Qiang-yong, YANG

- Wen-dong, et al. Comparative analyses of model tests and in-situ monitoring of zonal disintegration of rock mass in deep tunnels[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2011, 33(1): 70—76.
- [5] Hansiörg Kielhöfer. Bifurcation theory—An introduction with applications to partial differential equations[M]. New York: Springer, 2010.
- [6] 秦卫星, 陈胜宏, 刘金龙. 不连续化分叉条件及其在边坡稳定分析中的应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(增刊 1): 4912—4916.
- QIN Wei-xing, CHEN Sheng-hong, LIU Jin-long. Discontinuous bifurcation condition and its application to slope stability analysis[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2005, 24(Supp.1): 4912—4916.
- [7] 吕玺琳, 钱建固, 黄茂松. 基于分叉理论的轴对称条件下岩石变形带分析[J]. 水利学报, 2008, 39(3): 307—312.
- LÜ Xi-lin, QIAN Jian-gu, HUANG Mao-song. Analysis of deformation band in rock under axisymmetrical condition based on bifurcation theory[J]. **Journal of Hydraulic Engineering**, 2008, 39(3): 307—312.
- [8] 杨强, 陈新, 周维垣. 岩石类材料的分叉分析及其工程应用[J]. 岩土工程学报, 2001, 23(4): 403—406.
- YANG Qiang, CHEN Xin, ZHOU Wei-yuan. The analysis of discontinuous bifurcation of rocklike materials and its engineering application[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2001, 23(4): 403—406.
- [9] 钱建固, 黄茂松. 轴对称状态下土体剪切带触发形成的分叉理论[J]. 岩土工程学报, 2003, 25(4): 400—404.
- QIAN Jian-gu, HUANG Mao-song. Bifurcation of soils at inception of shear band under axisymmetric conditions[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2003, 25(4): 400—404.
- [10] 甄文战, 孙德安. 砂的临界状态本构模型局部化分叉分析[J]. 水利学报, 2011, 42(5): 588—593.
- ZHEN Wen-zhan, SUN De-an. Bifurcation analysis of strain localization by critical state model for sands[J]. **Journal of Hydraulic Engineering**, 2011, 42(5): 588—593.
- [11] OTTOSEN N S, RUNESSON K. Properties of discontinuous bifurcation solutions in elasto-plasticity[J]. **International Journal of Solids and Structures**, 1991, 27(4): 401—421.
- [12] 张永强, 宋俐, 俞茂宏. 平面应变问题非连续分叉统一解[J]. 土木工程学报, 2004, 37(4): 535—540.
- ZHANG Yong-qiang, SONG Li, YU Mao-hong. Unified solution of discontinuous bifurcation for plane strain problems[J]. **China Civil Engineering Journal**, 2004, 37(4): 535—540.
- [13] 尹光志, 黄滚, 代高飞, 等. 基于 CT 数的煤岩单轴压缩破坏的分叉与混沌分析[J]. 岩土力学, 2006, 27(9): 1465—1471.
- YIN Guang-zhi, HUANG Gun, DAI Gao-fei, et al. Bifurcation and chaos analysis of coal and rock damage under uniaxial compression based on CT values[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2006, 27(9): 1465—1471.
- [14] BORJA R I, REGUEIRO R A, LAI T Y. FE modeling of strain localization in soft rock[J]. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, 2000, 126(4): 335—343.
- [15] Itasca Consulting Group, Inc. FLAC^{3D}(Fast Lagrangian analysis of continua in 3 dimensions) online manual[M]. Minneapolis: Itasca Consulting Group, Inc., 2005.